

18.10.2023
ТЕХНОЛОГІЇ В ОСВІТІ:
ПАНОРАМА ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ АПРОБОВАНИХ
ВИКЛАДАЧЕМ ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

Панорама інтерактивних технологій апробованих викладачем фізики та математики



Володимир Бойко

Бойко В.П. - Нові методи навчання, нестандартні форми проведення занять допомагають розбудити інтерес студента до дисциплін, сприяють більш глибокому вивченню теми заняття. Застосування інтерактивних методів навчання, які забезпечують формування у студентів творчих умінь, розвитку їх пізнавальної діяльності, самостійності, індивідуальних творчих здібностей, спонукають викладача до пошуку методів найефективніших до його дисциплін. Виникнення інтересу до математики у студентів значною мірою залежить від методики її викладання, від того, наскільки вміло буде побудована робота. Наявність комп'ютерів і відповідного програмного забезпечення дозволяє розширити коло прикладів, багато з яких виникають у новій освітній технології. Реалізація комп'ютерного підходу потребує розробки методичного і методологічного забезпечення, створення відповідних програм, великої роботи по підготовці до занять. За допомогою комп'ютера як засобу моделювання студент отримує графічний образ поняття разом із пов'язаною з ним числовою інформацією, що спрощує усвідомлення змісту нового поняття, сприяє розвитку образного мислення та формуванню просторових уявлень. Використання інтерактивних технологій навчання, дозволяє підвищити рівень знань студентів та ефективність оволодіння вміннями навчального матеріалу.

- ▶ Інтерактивне навчання на заняттях фізики і математики визначається практичним застосуванням фундаментальних знань цих предметів.
- ▶ Саме практичне застосування дозволяє показати необхідність знань вже зараз а не через певний час.

- ▶ Найширше застосовується інтерактивне навчання при виконанні лабораторних робіт з фізики. Всі лабораторні роботи виконуються груповим методом малими групами, але в кожного є своє індивідуальне завдання, яке визначає початкові умови виконання дослідів, або дослідження різних приладів.

- ▶ [Лабораторна робота №1](#)
- ▶ [Лабораторна робота №24](#)
- ▶ [Лабораторна робота №26](#)

Лабораторна робота №1

Тема: Визначення прискорення руху тіла при рівноприскореному русі. (рух по похилому жолобу)

Мета: визначити прискорення руху кульки, що скочується по похилому жолобі.

Обладнання:

Хід роботи

Підготовка до експерименту

1. Закріпіть жолоб у лашці штатива на висоті вказаній у таблиці варіантів.
2. Відміряйте від верхньої частини жолоба довжину задану в таблиці варіантів і встановіть там металевий циліндр.

Таблиця варіантів

№ варіанту	Висота см.	Довжина см.

Експеримент

1. Розташуйте кульку на верхньому краю жолоба. Відпустивши кульку виміряйте час t_1 за який кулька скочується з жолоба.

Тема: Вивчення спектрів випромінювання.

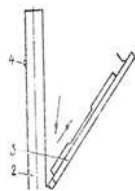
Мета: Навчити студентів аналізувати спектри випромінювання.

Обладнання: Спектроскоп, електрична лампа, автотрансформатор, джерело живлення, штатив для закріплення фітелів, люмінесцентна лампа, спектральні трубки, прилад для запалювання спектральних трубок.

Теорія: Якщо випромінювання джерела світла направити на скляну призму, і на шляху променів, що пройшли крізь неї поставити екран, то на екрані можна спостерігати набір кольорових полос – спектр. Причиною цього є різна швидкість поширення різних променів у середовищі.

Спостерігати спектр можна за допомогою спектроскопа.

Порядок виконання роботи:



Лабораторна робота № 26 (1)
Вивчення затухаючих коливань.

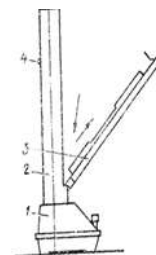
Мета роботи - визначити логарифмічний декремент затухання і коефіцієнт затухання фізичного маятника; вивчити залежність амплітуди затухаючих коливань від часу.

Прилади й матеріали: установка для вивчення затухаючих коливань, секундомір.

Основні розрахункові формули

Коливальним називається такий рух, при якому матеріальна точка, рухаючись уздовж деякої лінії, періодично проходить через одні і ті самі положення.

Під дією пружної (квазіпружної) сили, яка пропорційна зміщенню x коливної точки від положення рівноваги:



1. Спостереження суцільного спектра нагрітого металу.
2. Під'єднати джерело живлення до лампи розжарення.
3. Окуляр спектроскопа наблизити до ока.
4. Спостерігати спектр при повному розжаренні нитки; знайти в ньому всі спектральні кольори.
5. Для кожного спектрального кольору визначити кількість поділок на мікрометричному гвинту спектроскопа. Мікрометричний гвинт має крок різьби 0,5 тому кількість поділок на стеблі ділиться на 2 перша поділка стебла вважається нульовою, а кількість поділок на обертовій частині (лімба) додається сотими

Під дією пружної (квазіпружної) сили, яка пропорційна зміщенню x коливної точки від положення рівноваги:

$$F_{\text{пр}} = -kx$$

де k – жорсткість пружини, здійснюється гармонійний коливальний рух. Знак «-» означає, що сила пружності напрямлена в бік, протилежний зміщенню x . При цьому залежність координати матеріальної точки від часу виражається рівнянням

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де A – амплітуда; ω_0 – циклічна (крутова) частота; α – початкова фаза.

На практиці будь-яке коливання матеріальної точки, яке не підтримується зовні, затухає, оскільки діють гальмівні сили. У першому наближенні можна вважати, що при невеликих швидкостях руху сили, які зумовлюють затухання механічних коливань, пропорційні швидкості. Назвемо їх силами тертя:

$$F_{\text{тр}} = -rv$$

- По завершенню лабораторних робіт пропонується розв'язання простих задач що містять дані тієї чи іншої лабораторної роботи.

- [Задачі до лабораторних робіт 1](#)
- [Задачі до лабораторних робіт 2](#)
- [Задачі до лабораторних робіт 3](#)

Варіант 1

- Кулька скотилася по жолобу довжиною 2,4 м за 1,27 с. Визначити прискорення.
- Два вантажі масами 240 і 180 г. прив'язані до нитки і перекинута через блок. З яким теоретичним прискоренням вони рухаються не враховувати силу тертя.
- Вантаж за 14 с. зробив 25 обертів. Визначити кутову швидкість руху вантажу.
- По похилій площині тягнуть брусок масою 230 г. Визначити коефіцієнт тертя якщо сила тяги дорівнює 1,7 Н а кут нахилу 35° .
- По похилій площині тягнуть брусок масою 340 г. Визначити коефіцієнт корисної дії площини, якщо сила тяги дорівнює 2,4 Н а довжина похилої площини 1,7 м висота підняття 45 см.
- Кулька випущена з висоти 27 см пролітає в горизонтальному напрямку 38 см. Визначити горизонтальну швидкість кульки.
- Кулька масою 75 г. з висоти 35 см пролетіла в горизонтальному напрямі 48 см. Чому дорівнює зміна кінетичної енергії кульки.
- Кулька скочується по жолобу проходячи відстань 1 м. Яка теоретична швидкість кульки в кінці жолоба, якщо одна висота 36 см друга 58 см а відстань між висотами 1,4 м.
- Важок масою 124 г. підвищений на відстані 15 см від точки обертання. Чому дорівнює момент його сили тяжіння.

Варіант 2

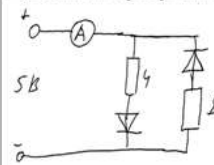
- Кулька скочується по жолобу завдовжки 2,2 м. що піднятий на висоту 43 см. Визначити теоретичне значення прискорення в цьому випадку.
- Два вантажі за 2,5 с проходять 75 см на машині Атвуда. Яке при цьому прискорення.
- Вантаж за 24 с. зробив 12 обертів. Радіус обертання 12 см. Визначити лінійну швидкість вантажу.
- По похилій площині тягнуть брусок масою 280 г. Визначити коефіцієнт тертя якщо сила тяги дорівнює 1,2 Н а довжина площини 1,57 м, а висота 50 см.
- По похилій площині тягнуть брусок масою 280 г. Визначити коефіцієнт корисної дії площини, якщо сила тяги дорівнює 0,9 Н а довжина похилої площини 2,8 м висота підняття 65 см.
- Кулька випущена з висоти 55 см пролітає в горизонтальному напрямку 88 см. Визначити горизонтальну швидкість кульки.
- Кулька масою 95 г. з висоти 55 см пролетіла в горизонтальному напрямі 78 см. Чому дорівнює зміна кінетичної енергії кульки.
- Кулька скочується по жолобу проходячи відстань 1,2 м. Яка теоретична швидкість кульки в кінці жолоба, якщо одна висота 26 см друга 45 см а відстань між висотами 0,85

Задачі до лабораторних робіт 2

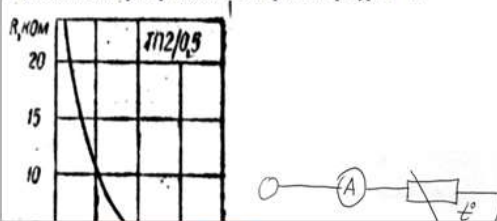
1

- При включенні конденсатора ємністю 5,5 мкФ стрілка приладу відхилилась на 7,5 поділки, а при включенні конденсатора невідомої ємності на 4,5 визначити ємність невідомого конденсатора.
- При послідовному включенні амперметр показав 0,35 А, напруга на першому резисторі 2,3 В, на другому 4,5, визначити опір третього резистора, якщо джерело живлення 12 В.
- При під'єднанні до джерела струму опору 4 Ом амперметр показав 3 А, а при під'єднанні 10 Ом – 1,5 А. Визначити е.р.с. та внутрішній опір джерела струму.
- Довжина провідника 3,5 м, діаметри – 0,12 мм, опір – 3,7 Ом визначити питомий опір провідника.
- При напрузі 200 В через лампочку проходить струм 0,3 А. Визначити потужність що споживає лампа.

6 Що покаже амперметр в даній схемі.

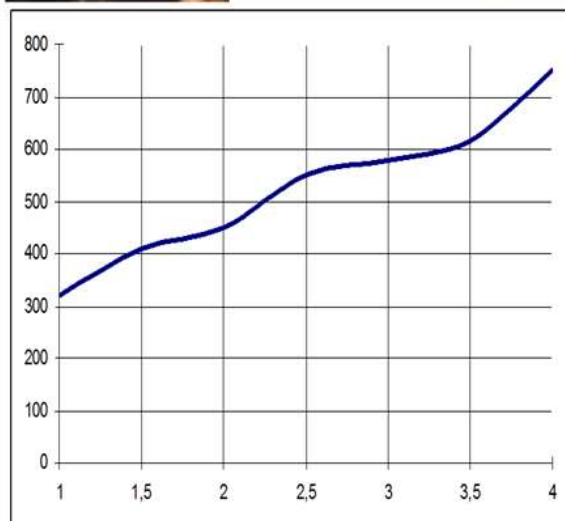


7 Що покаже амперметр в даній схемі при температурі 60°C.



* II.

- Відстань від предмета до лінзи 25 см, а від лінзи до зображення 75 см. Визначити оптичну силу лінзи.
- Кут падіння променя на скло дорівнює 63° , кут заломлення 49° . Визначити показник заломлення скла.
- На екрані розміщеному на відстані 45 см від дифракційної решітки максимуми другого порядку видно на відстані 24 мм від центру. Визначити довжину хвилі світла в нм.
- Використовуючи дані відліку спектроскопа визначити довжину хвилі по графіку.



► Крім лабораторних робіт з фізики використовується багато практичних завдань, з поясненням та індивідуальними завданнями.

► **Завдання 52(Робота виходу електрона з металу. Термоелектронна емісія. Контактна різниця потенціалів. Термопара. Ефект Пельтьє)**

Речовина	Формула	Робота виходу eВ	Речовина	Формула	Робота виходу eВ
срібло	Ag	4,7	алюміній	Al	4,2
миш'як	As	4,88	золото	Au	4,8
бор	B	4,60	барій	Ba	2,52
берилій	Be	3,92	вісмут	Bi	4,34
вуглець (графіт)	C	4,65	кальцій	Ca	2,92
кадмій	Cd	4,04	церій	Ce	2,6 5
кобальт	Co	4,40	хром	Cr	4,60
цезій	Cs	1,94	мідь	Cu	4,36
залізо	Fe	4,5	галій	Ga	4,05
германій	Ge	4,66	гафній	Hf	3,53
ртуть	Hg	4,52	індій	In	3,8
ірідій	Ir	4,57	калій	K	2,25
лантан	La	3,3	літій	Li	2,49
магній	Mg	3,67	марганець	Mn	3,78

карбід цирконія	ZrC	2,6	нітрид цирконія	ZrN	2,92
-----------------	-----	-----	-----------------	-----	------

Одним із способів збільшення енергії електронів в металах і сплавах є підвищення температури. Близько 80% енергії припадає на рух вільних електронів, інші 20% рух іонів в вузлах кристалічної решітки. Оцінимо яку температуру необхідно для надання енергії вільним електронам 1 eВ. «Електронний газ» можна вважати ідеальним

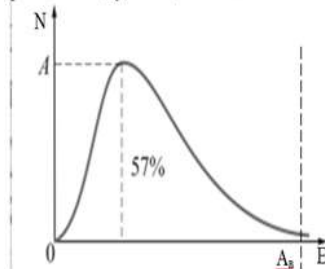
$$E_k = \frac{3}{2} kT$$

k – стала Больцмана

$$E_k = 0,8 \frac{3}{2} kT$$

$$T = \frac{2E_k}{0,8 \cdot 3k} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{0,8 \cdot 3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} = 966 K = 693^\circ C$$

Згідно цього графіку частина вільних електронів мають енергію більшу ніж робота виходу, але ця частина мала.



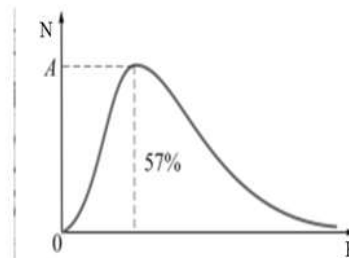
Тобто в кожному металі є невелика частина електронів які здатні покинути даний метал і знаходяться біля нього у вигляді електронної хмаринки, так як сам метал після виходу електрона стає позитивно зарядженим. При нормальних умовах кількість електронів здатних покинути метал надзвичайно мала, фактично дорівнює нулю. При збільшенні температури графік змінюється так.

§2-53. Робота виходу електрона з металу. Термоелектронна емісія. Контактна різниця потенціалів. Термопара. Ефект Пельтьє.

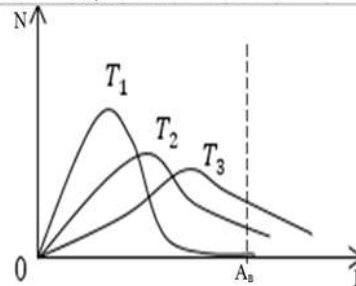
Металічна кристалічна решітка представляє собою іони металу розмішені в вузлах кристалічної решітки, а їх валентні електрони є спільними для всього металу. Ці електрони являють собою так званий «електронний газ». На відміну від звичайних молекул газу електрони не можуть покинути метал, тому що вони притягуються до іонів кристалічної решітки. Для того щоб електрон покинув метал йому потрібно надати деякої енергії, ця енергія називається роботою виходу електрона з металу. Ця енергія вимірюється в нестандартних одиницях електрон-вольтах. 1 eВ = 1,6 · 10⁻¹⁹ Дж. Кожний метал має своє значення роботи виходу. Для деяких речовин робота виходу задана в таблиці.

молібден	Mo	4,20	натрій	Na	2,28
ніобій	Nb	3,99	неодим	Nd	3,3
нікель	Ni	4,96	осмій	Os	4,55
свинець	Pb	4,05	палладій	Pd	4,98
празеодим	Pr	2,7	платина	Pt	5,35
рубідій	Rb	2,13	реній	Re	4,98
родій	Rh	4,75	рутений	Ru	4,52
сурьма	Sb	4,34	скандій	Sc	3,2
селен	Se	4,86	кремній	Si	3,63
самарій	Sm	3,2	олово (γ-форма)	Sn	4,38
олово (β-форма)	Sn	4,50	стронцій	Sr	2,74
тантал	Ta	4,13	теллур	Te	4,73
торій	Th	3,42	титан	Ti	4,14
талій	Tl	3,86	уран	U	3,27
ванадій	V	3,97	вольфрам	W	4,54
цинк	Zn	4,23	цирконій	Zr	3,96
бромисте	AeBr	3,9	хлористе	AeCl	4,6

Виходячи з цього для більшості речовин температура роботи виходу вища ніж температура плавлення цієї речовини. Але ця температура відповідає кінетичній енергії більшості електронів. При цьому вільні електрони так як і молекули ідеального газу рухаються з різними швидкостями і мають графік розподілу по швидкостях, який називається розподіл Максвелла.



Згідно цього графіку частина вільних електронів мають енергію більшу ніж робота виходу, але ця частина мала.



$$T_3 > T_2 > T_1$$

З останнього графіка видно що кількість електронів здатних покинути метал з збільшенням температури зростає. Явище випаровування електронів з металу внаслідок нагрівання називається термоелектронна емісія. Розглянемо явище яке відбуватиметься в місці контакту двох провідників з різними значеннями роботи виходу електрона.

- Завдання 89(Фотометрія. Тілесний кут. Світловий потік. Сила світла. Освітленість.)
- Завдання 106(Випромінювання та його характеристики. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон Віна.)
- Завдання 123(Елементарні частинки і античастинки. Кварки.)

Всі лампи можна вважати точковими джерелами світла. Для розрахунку освітленості з відбиваючими поверхнями розглядають як саме джерело світла так і його зображення в відбиваючій поверхні і вважають що таких джерел світла 2 але вони знаходяться в різних місцях.

Світловий потік – це енергетична характеристика світла. Він дорівнює енергії видимого світла що виділяється джерелом світла за одиницю часу, тобто потужність світла. Для кожної електричної лампочки є свій світловий коефіцієнт який приведений в таблиці. $\Phi = P \cdot k$ Світловий потік позначається буквою Φ і вимірюється в люменах (лм).

Інша характеристика це сила світла, яка визначається за формулою

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} \text{ тобто це світловий потік що припадає на один стерadian тілесного кута.}$$

Сила світла вимірюється в канделах (кд).

$$\text{Для звичайних лампочок тілесний кут дорівнює } 4\pi. I = \frac{\Phi}{4\pi}.$$

101. Випромінювання та його характеристики. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон Віна.

Будь яке тіло нагріте вище 0К випромінює енергію у вигляді пакетів електромагнітних хвиль подібних до світла. Це випромінювання називається тепловим, так як пов'язане з нагріванням тіла. Теплове випромінювання є рівноважним, тобто кожне тіло як сприймає випромінювання інших тіл так і само випромінює своє випромінювання.

Основні характеристики випромінювання

Потік випромінювання – це сумарна енергія яка випромінюється тілом за одну секунду.

$$\Phi = \frac{E}{t} \text{ По суті це потужність випромінювання і вимірюється у ватах (Вт).}$$

Інтегральна випромінювальна здатність – це потік випромінювання тіла з одиниці площі цього тіла.

$$R_v = \frac{\Phi}{S} \text{ Одиниці вимірювання } \left(\frac{Bm}{m^2}\right).$$

Спектральна випромінювальна здатність – це потік випромінювання тіла з одиниці площі цього тіла але тільки для певної довжини хвилі випромінювання.

Закон Кірхгофа

Відношення спектральної випромінювальної здатності до спектральної поглинальної здатності не залежить від самого тіла а тільки від температури тіла та довжини хвилі випромінювання.

$$\frac{r_\lambda}{a_\lambda} = f(T, \lambda)$$

Таким чином тіла які добре поглинають випромінювання так само добре його випромінюють.

Закон Стефана-Больцмана визначає інтегральну випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла.

$$R_v = \sigma \cdot T^4$$

$$\sigma = \text{стала Стефана-Больцмана } \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{Bm}{m^2 \cdot K^4}, T - \text{абсолютна температура поверхні}$$

тіла в кельвінах.

Закон Віна визначає довжину хвилі на яку припадає максимум спектральної випромінювальної здатності. Якщо згадати розподіл молекул по швидкостях, то графік розподілу має так звану дзвоноподібну форму, цей графік називається розподіл Гауса.

85. Фотометрія. Тілесний кут. Світловий потік. Сила світла. Освітленість.

* Коефіцієнт світловіддачі для різних видів ламп

Вид лампи	Коефіцієнт світловіддачі лм/Вт
1. Світлодіодна лампа з матовою колбою	85
2. Світлодіодна лампа з прозорою колбою	100
3. Люмінесцентна лампа	60
4. Дугова ртутна лампа	58
5. Лампа розжарення 40 Вт	10
6. Лампа розжарення 60 – 150 Вт	12
7. Лампа розжарення 25 Вт	9
8. Лампа розжарення 200 – 1000 Вт	15
9. Лампа розжарення 1500 – 5000 Вт	20
10. Газорозрядні лампи	75

І характеристика яка характеризує кількість світла що падає на поверхню називається освітленість. Вона визначається як світловий потік що припадає на одиницю площі поверхні. $E = \frac{\Phi}{S}$ і вимірюється в люксах (лк). Якщо світло

падає на поверхню під деяким кутом то формула має вигляд $E = \frac{\Phi}{S} \cdot \cos \alpha$. Всі

джерела світла в яких освітленість залежить від кута падіння називаються КОСІНУСНИМИ.

$$\text{Тепер } E = \frac{I \cdot 4\pi}{S} \cdot \cos \alpha = \frac{I \cdot 4\pi}{4\pi \cdot R^2} \cdot \cos \alpha = \frac{I}{R^2} \cdot \cos \alpha$$

$$\Phi = \frac{E}{t} \text{ По суті це потужність випромінювання і вимірюється у ватах (Вт).}$$

Інтегральна випромінювальна здатність – це потік випромінювання тіла з одиниці площі цього тіла.

$$R_v = \frac{\Phi}{S} \text{ Одиниці вимірювання } \left(\frac{Bm}{m^2}\right).$$

Спектральна випромінювальна здатність – це потік випромінювання тіла з одиниці площі цього тіла але тільки для певної довжини хвилі випромінювання.

$$r_\lambda = \frac{\Phi_\lambda}{S}$$

Поглиняльна здатність тіла – це число яке показує яка частина енергії випромінювання що падає на тіло поглинається ним.

$$\alpha = \frac{\Phi_{\text{погл}}}{\Phi_{\text{пад}}} \text{ Поглиняльна здатність знаходиться в межах від 0 до 1. Тіла в яких поглиняльна}$$

здатність дорівнює одиниці називаються абсолютно чорними тілами. Близькими до абсолютно чорних тіл є чорний бархат і маленький отвір в посудині з непрозорими стінками. Абсолютно чорними тілами є Сонце і всі зірки вони повністю поглинають все

$$v \ll v_0 \text{ а так, як } v = \frac{c}{\lambda} \text{ то } \lambda \gg \lambda_0 \text{ Тому така велика довжина хвилі реліктового}$$

випромінювання, хоч оціночна довжина хвилі випромінювання великого вибуху дуже мала.

На тепловому випромінюванні базується так званий парниковий ефект – це здатність прозорих речовин пропускати випромінювання меншої довжини хвилі і відбивати випромінювання більшої довжини хвилі. Наприклад звичайне віконне скло добре пропускає видиме світло, а відбиває інфрачервоні промені, які додатково нагрівають предмети під склом.

Як показано вище за характеристиками теплового випромінювання можна визначити температуру тіла. Прилади які вимірюють температуру за тепловим випромінюванням називаються пірометрами. Пірометри які використовують закон Стефана-Больцмана називаються інтегральними пірометрами і працюють на невеликих відстанях від об'єктів вимірювання. Пірометри які використовують закон Віна називаються спектральними пірометрами і використовуються для вимірювання температури на будь-яких відстанях, навіть температуру поверхні найдалішніх зірок.

► Всі такі завдання мають питання загального обговорення, але кінцеве завдання в кожного індивідуальне

► На заняттях математики інтерактивні методи частіше пов'язані з задачами прикладної математики.

- 58(Проста імовірність)
- 61(випадкові величини)
- Задачі на інтегрування
- 137(Ряд Тейлора)

58. Проста імовірність спонтанних подій.

Випадковими вважаються події які відбуваються незалежно від зовнішніх чинників, або дія зовнішніх чинників настільки складна що описати її неможливо. Це такі події як падіння монети, падіння кубика, витягнута навмання карта, рух молекул та елементарних частинок. Імовірність визначає яка частина з усієї можливої кількості подій що задовольняє задану умову. Тому для визначення імовірності використовують таку формулу.

$$P = \frac{N}{N_0}$$

N_0 - загальна кількість можливих подій.

N - кількість подій які задовольняють задану умову.

Наприклад в ящику міститься 6 зелених і 10 червоних кульок, яка імовірність того що витягнута навмання кулька буде зеленою. Загальна кількість подій дорівнює сумі всіх кульок що знаходяться в ящику $N_0 = 6 + 10 = 16$. Серед цих кульок 6 зелених тому кількість подій що задовольняють задану умову дорівнює 6.

$$P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Для поодинокій події значення імовірності може нічого не означати, але для великої кількості подій імовірність точно визначає частину подій від загальної кількості, які задовольняють дану умову. Тобто якщо ми з даного ящика витягуватимемо кульку 1000 разів і кластимемо її назад то приблизно 375 разів попадеться зелена кулька.

Розглянемо просту імовірність для декількох подій.

Монета підкидається три рази визначити імовірність то що 2 рази випаде герб.

Визначимо загальну кількість подій Так-як монета при падінні має два варіанти падінні то загальна кількість можливих варіантів $N_0 = 2^n = 2^3 = 8$

Розпишемо всі ці вісім подій.

1. ГТТ
2. КТТ
3. ГТК
4. ГТК
5. ККТ
6. ГТК
7. КТК
8. ККК

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

$$P_3(2) = 3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 = 3 \cdot 0,125 = 0,375$$

Та ж сама імовірність за формулою Муавра-Лапласа (справедлива для $p > 0,01$ і $q > 0,01$,

для $p < 0,01$ використовується формула Пуассона $P_n^k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ де $\lambda = n \cdot p$)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P_3(2) = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot \varphi\left(\frac{2-3 \cdot 0,5}{\sqrt{3 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) = \frac{1}{0,866} \cdot \varphi\left(\frac{2-1,5}{0,866}\right) = 1,1547 \cdot \varphi(0,5774)$$

Серед цих подій два рази герб випав у подіях 2, 3, 4, тому таких подій три Імовірність дорівнює

$$P = \frac{3}{8} = 0,375$$

Розглянемо імовірність кожної події окремо. При кожному киданні монети імовірність випадання герба становить $p = 0,5$ а імовірність не випадання герба $q = 1 - p = 0,5$.

Імовірність заданої події рівна $p^k \cdot q^{n-k}$, а кількість таких подій дорівнює кількості комбінацій C_n^k

Все це відображено в формулі Бернуллі.

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Формула Бернуллі визначає імовірність того що з n спроб k подій які задовольняють дану умову.

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,5^2 \cdot (1-0,5)^{3-2}$$

$$\varphi(0,5774) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{0,5774^2}{2}} = \frac{1}{2,506} \cdot e^{-0,1667} = 0,399 \cdot 0,8465 = 0,3378$$

$$P_3(2) = 1,1547 \cdot 0,3378 = 0,39$$

Насправді формула Муавра-Лапласа використовується для великих значень n але вона також визначає близькі значення до дійсного.

Слідуючий приклад для декількох подій

В ящику міститься 6 зелених і 10 червоних кульок, яка імовірність того що серед трьох навмання витягнутих кульок буде дві зелені.

В цьому прикладі не можна розглянути як три окремі події тому що після першої події стає невідома імовірність другої події.

Визначимо загальну кількість можливих подій

$$N_0 = C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 5 \cdot 16 = 560$$

§3. Дискретна та неперервна випадкова величини, та їх характеристики.
Дискретною називається випадкова величина, яка може набувати лише певних з.
Наприклад монета підкидається п'ять разів визначити характеристики для кількості випадання герба. Така кількість може приймати такі значення 0; 1; 2; 3; 4; 5. Для значення існує ймовірність випадання цього значення. Визначимо ці ймовірності: формулою Бернуллі.

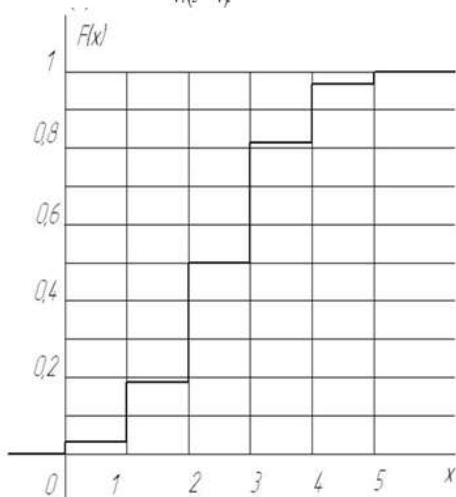
$$P_3(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 = \frac{5!}{0!(5-0)!} \cdot 0,5^0 \cdot (1-0,5)^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0,5^5 = 0,03125$$

$$P_3(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^4 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot 0,5^1 \cdot (1-0,5)^4 = 5 \cdot 0,5 \cdot 0,5^4 = 0,15625$$

$$P_3(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot 0,5^2 \cdot (1-0,5)^3 = 10 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 = 0,3125$$

$$P_3(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0,5^3 \cdot (1-0,5)^2 = 10 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = 0,3125$$

$$P_3(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot (1-p)^1 = \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot 0,5^4 \cdot (1-0,5)^1 = 5 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 0,15625$$



$$P_3(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot (1-p)^1 = \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot 0,5^4 \cdot (1-0,5)^1 = 5 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 0,15625$$

$$P_3(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot (1-p)^0 = \frac{5!}{5!(5-5)!} \cdot 0,5^5 \cdot (1-0,5)^0 = 1 \cdot 0,5^5 \cdot 1 = 0,03125$$

Будуємо функцію розподілу випадкової величини. Функція розподілу показує сумарну ймовірність величин які менші або дорівнюють даній величині. Таким чином функція розподілу для чисел менших нуля буде дорівнювати нуль. А для чисел більше 5 дорівнюватиме 1 так як сума всіх ймовірностей дорівнює 1.

Побудуємо графік функцій розподілу таким чином що з кожним числом ми додаємо його ймовірність.

$$0 - 1 \quad F(x) = 0,03125$$

$$1 - 2 \quad F(x) = 0,03125 + 0,15625 = 0,1875$$

$$2 - 3 \quad F(x) = 0,1875 + 0,3125 = 0,5$$

$$3 - 4 \quad F(x) = 0,5 + 0,3125 = 0,8125$$

$$4 - 5 \quad F(x) = 0,8125 + 0,15625 = 0,96875$$

$$5 - \quad F(x) = 0,96875 + 0,03125 = 1$$

Визначимо математичне сподівання випадкової величини. Іншими словами це середнє значення випадкової величини. Математичне сподівання знаходиться за формулою

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

$$M(x) = 0 \cdot 0,03125 + 1 \cdot 0,15625 + 2 \cdot 0,3125 + 3 \cdot 0,3125 + 4 \cdot 0,15625 + 5 \cdot 0,03125 = 0 + 0,15625 + 0,625 + 0,9375 + 0,625 + 0,15625 = 2,5$$

Математичне сподівання для дискретної величини число не обов'язково з можливих значень тому вибирають найближче з можливих значень. Це значення називається модою.

Для даного випадку модами є число 2 або 3.

Дисперсія є мірою розсіювання значень випадкової величини навколо середнього значення (математичного сподівання). Для дискретних і неперервних випадкових величин формула для дисперсії запишеться, відповідно, у такому вигляді:

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 \cdot p_i$$

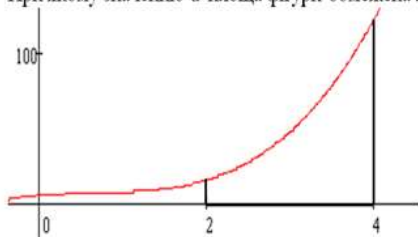
Варіант 1

1. Схематично намалювати графіки та визначити площу фігури обмеженої лініями

$$y = 4 - x^2; y = 0$$

2. На малюнку схематично зображено графік функції $y = 3 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + 5 \cdot x + 6$.

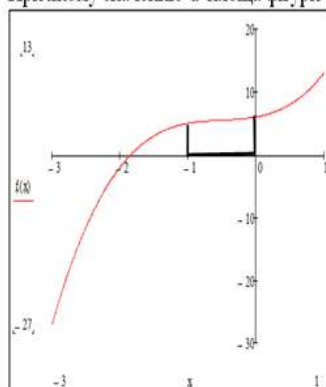
При якому значенні a площа фігури обмежена лініями дорівнює 110.



3. Визначити значення a при якому площа фігури обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 18.

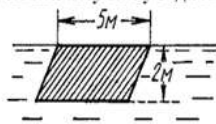
2. На малюнку схематично зображено графік функції $y = a \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 6$.

При якому значенні a площа фігури обмежена лініями дорівнює 5,5.



3. Визначити значення a при якому площа фігури обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 18.

4. Знайти силу тиску води на фігуру



Варіант 2

1. Схематично намалювати графіки та визначити площу фігури обмеженої лініями

$$y = x^2 + 2x + 2; y = 0; x = 0; x = -3$$

2. На малюнку схематично зображено графік функції $y = a \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 6$.

При якому значенні a площа фігури обмежена лініями дорівнює 5,5.

3. Визначити значення a при якому площа фігури обмеженої лініями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 12.

4. Знайти силу тиску води на фігуру

